
REGRESI LINIER FUZZY PADA DATA TIME SERIES

Abdul Rozak

Program Studi Matematika
Universitas Pesantren Tinggi Darul Ulum Jombang
abd.rozak76@yahoo.co.id

Abstrak

Perkembangan teori dan aplikasi logika fuzzy cukup luas pada berbagai bidang, selain pada model regresi, teori dan aplikasi logika fuzzy juga berkembang pada metode peramalan data time series yang disebut dengan fuzzy time series. Pada penelitian ini dilakukan pengkajian dan penggabungan keunggulan dari regresi fuzzy dan metode Autoregressive (AR). Keuntungan dari menggunakan metode ini adalah dihasilkan interval (upper bound dan lower bound) pada hasil ramalan, sehingga dapat digunakan dalam pengambilan keputusan baik pada kemungkinan yang terbaik atau terburuk.

Kata Kunci : Konsep Fuzzy, Autoregressive, Regresi

Abstract

The development of the theory and applications of fuzzy logic is quite wide in various fields, in addition to the regression model, the theory and application of fuzzy logic is also developed in time series forecasting method called fuzzy time series. In this research, assessment and incorporation advantage of fuzzy regression and autoregressive method (AR). The advantage of using this method is generated interval (upper bound and lower bound) on the results of the forecast, so it can be used in decision-making in both the best and worst possibilities.

Key Words : Fuzzy Concept, Autoregressive, Regression

1. Pendahuluan

Peramalan memegang peranan yang penting dalam kehidupan, suatu kejadian yang belum diketahui dapat diprediksi dengan menggunakan data-data historis dari kejadian tersebut. Analisis *time series* sering digunakan dalam melakukan peramalan terhadap data-data historis, sebagai contoh dalam mengamati kecepatan angin, tekanan darah dalam tubuh dan transaksi bursa saham baik domestik maupun internasional, kebutuhan listrik, dan lain sebagainya.

Sejak diperkenalkannya logika fuzzy oleh Zadeh (1965), aplikasi logika fuzzy cukup berkembang luas pada berbagai bidang, termasuk pada data *time series*. Kontribusi baru diperkenalkan dalam masalah peramalan *time series*, dimana mampu memberi penjelasan pada data yang disajikan dalam nilai-nilai linguisitik [3]. Regresi fuzzy dengan tujuan untuk mengatasi adanya *error* dalam

permodelan [4]. Akan tetapi dalam model ini terdapat kelemahan, yaitu jika terdapat nilai data yang ekstrim akan mengakibatkan model interval peramalan sangat luas, tentu saja jika interval ramalan sangat luas akan mengakibatkan ketidakpercayaan pada hasil ramalan yang ada.

Watada (1992) menggunakan konsep regresi fuzzy pada data *time series*, atau dikenal dengan analisis *fuzzy time series*, tetapi di dalamnya tidak mengikutkan konsep Box-Jenkins [2]. Kemudian metode *Fuzzy ARIMA* pada peramalan perdagangan pasar asing [5] dimana mencoba menggabungkan keunggulan dari regresi fuzzy dan metode ARIMA untuk model peramalan yang berupa interval yang lebih baik, dalam arti mengikuti pola data yang diramalkan.

2. Kajian dan Pembahasan

1) Model Regresi

Metode regresi yang merupakan metode yang memodelkan hubungan antara variabel respon (y) dan variabel bebas (x_1, x_2, \dots, x_p). Model regresi linier secara umum dinyatakan dengan

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + \varepsilon$$

Jika diambil sebanyak n pengamatan, maka model di atas dapat ditulis sebagai:

$$y_i = \beta_0 + \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \quad (1.1)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$; $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ adalah parameter model dan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ adalah error yang diasumsikan identik, independen, dan berdistribusi normal dengan mean nol dan varians konstan σ^2 [1].

Jika dituliskan dalam notasi matriks maka model (1.1) menjadi:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.2)$$

Estimator dari parameter model didapat dengan meminimumkan jumlah kuadrat error atau yang dikenal dengan *Ordinary Least Square* (OLS), yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (1.3)$$

dengan

$\boldsymbol{\beta}$: vektor dari parameter yang ditaksir berukuran $n \times (p+1)$

\mathbf{X} : matrik data berukuran $n \times (p+1)$ dari variabel bebas yang elemen pada kolom pertama bernilai 1

\mathbf{y} : vektor observasi dari variabel respon berukuran $(n \times 1)$

$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor error yang berukuran $(n \times 1)$

k : banyaknya variabel bebas ($k = 1, 2, \dots, p$)

2) Konsep Himpunan Fuzzy

Teori Fuzzy pertama kali diperkenalkan pada tahun 1965 oleh Prof. Lotfi A. Zadeh dari Universitas California di Berkeley, menjelaskan bahwa konsep tentang himpunan fuzzy (fuzzy set = himpunan kabur) yang menyatakan bahwa selain pendekatan probabilitas, ketidakpastian dapat didekati dengan menggunakan metode lain, dalam hal ini konsep himpunan fuzzy [7].

Jika X merupakan suatu himpunan dengan anggota-anggotanya dilambangkan dengan x , maka suatu himpunan fuzzy A dalam X didefinisikan dengan:

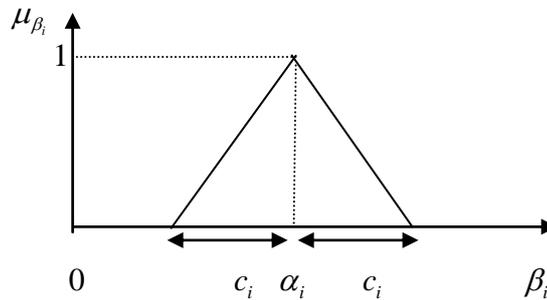
$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \quad (2.2)$$

dimana $\mu_A(x)$ disebut fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy A, dimana fungsi keanggotaan memetakan tiap elemen dari X pada derajat keanggotaan x pada interval [0,1]. Nilai dari $\mu_A(x)$ menjelaskan derajat keanggotaan x dalam A, jika $\mu_A(x)$ mendekati 0 maka derajat keanggotaan x dalam A semakin rendah, sebaliknya juga jika $\mu_A(x)$ mendekati 1 maka derajat keanggotaan x dalam A semakin tinggi.

Fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy yang digunakan adalah fungsi keanggotaan segitiga, persamaan dari fungsi keanggotaan segitiga adalah:

$$\mu_{\beta_i}(\beta_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{c_i} & \alpha_i - c_i \leq \beta_i \leq \alpha_i + c_i \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases} \quad (2.3)$$

Sedangkan untuk grafik fungsi keanggotaan segitiga adalah:



Gambar 2.1 Grafik fungsi keanggotaan segitiga

3) Model Regresi Fuzzy

Konsep dasar regresi fuzzy yang diusulkan oleh Tanaka (1982) adalah nilai residual antara nilai estimasi dan nilai pengamatan tidak dihasilkan oleh pengukuran *error*, tetapi oleh parameter yang tidak tetap di dalam model.

Model umum dari regresi fuzzy ditulis sebagai berikut:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n \quad (3.1)$$

dimana \mathbf{X} adalah vektor dari variabel bebas, *subscript* ' menyatakan operasi transposisi, n adalah banyaknya variabel dan β_i menyatakan himpunan fuzzy yang mempresentasikan parameter ke-i dari model.

β_i merupakan parameter fuzzy dari tipe L bilangan fuzzy $(\alpha_i, c_i)_L$, yaitu tipe bilangan fuzzy simetris dengan distribusi kemungkinannya adalah:

$$\mu_{\beta_i}(\beta_i) = L\{(\alpha_i - \beta_i) / c\} \quad (3.2)$$

dimana L adalah tipe fungsi yang didefinisikan oleh:

- i) $L(a_i) = L(-a_i)$
- ii) $L(0) = 1$
- iii) $L(a_i)$ adalah fungsi linier naik untuk $a_i \geq 0$
- iv) $\{a_i | L(a_i) \geq 0\}$ adalah interval tertutup

sehingga parameter fuzzy dibentuk dalam fungsi keanggotaan segitiga, yaitu:

$$\mu_{\beta_i}(\beta_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{c_i} & \alpha_i - c_i \leq \beta_i \leq \alpha_i + c_i \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases} \quad (3.4)$$

dimana $\mu_{\beta_i}(\beta_i)$ adalah fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy yang disajikan oleh parameter β_i , α_i merupakan nilai tengah (*middle value*) dari bilangan fuzzy dan c_i merupakan persebaran (*spread*) dari nilai tengah bilangan fuzzy. Nilai *spread* menunjukkan kekaburan (*fuzziness*) dari suatu fungsi.

Lebih lanjut fungsi keanggotaan dari bilangan fuzzy $y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}$ dapat didefinisikan dengan menggunakan fungsi keanggotaan segitiga parameter β_i sebagai berikut:

$$\mu_t(y_t) = \begin{cases} 1 - \frac{|y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\alpha}|}{\mathbf{c}' \mathbf{x}_t} & \text{untuk } \mathbf{x}_t \neq 0 \\ 1 & \text{untuk } \mathbf{x}_t = 0, y_t = 0 \\ 0 & \text{untuk } \mathbf{x}_t = 0, y_t \neq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

dengan $\boldsymbol{\alpha}$ merupakan vektor parameter dari model dan c nilai penyebaran dari semua parameter, t adalah banyaknya observasi, $t = 1, 2, \dots, k$. Sehingga persamaan (3.1) dapat ditulis menjadi :

$$y = (\alpha_1, c_1)x_1 + (\alpha_2, c_2)x_2 + \dots + (\alpha_n, c_n)x_n \\ = \sum_{i=1}^n (\alpha_i, c_i)x_i = \mathbf{x}'(\boldsymbol{\alpha}, c) \quad (3.6)$$

Untuk meminimalkan tingkat kesamaran (*vagueness*), S , didefinisikan sebagai penjumlahan dari penyebaran masing-masing parameter fuzzy dalam model.

$$\text{Minimize } S = \sum_{t=1}^k \mathbf{c}' \mathbf{x}_t \quad (3.7)$$

sehingga tiap observasi yang mengandung nilai y_t diasosiasikan dengan nilai keanggotaan yang lebih besar dari h , dimana $h \in [0, 1]$. Sesuai dengan persamaan:

$$\mu_y(y_t) \geq h, \text{ untuk } t = 1, 2, \dots, k. \quad (3.8)$$

derajat nilai h ditentukan secara subyektif, nilai h menunjukkan tingkat kekaburan dari parameter fuzzy yang ada dalam model. Index t dalam persamaan (3.8) menunjukkan data *nonfuzzy* yang digunakan untuk membangun model, sedangkan untuk menentukan parameter dari regresi fuzzy telah dirumuskan oleh Tanaka dkk (1982) dengan mengkonversi persamaan tersebut dalam permasalahan *linear programming* sebagai berikut:

$$\text{Minimize } S = \sum_{t=1}^k \mathbf{c}' \mathbf{x}_t \text{ dengan batasan yang diperoleh dari substitusi}$$

persamaan (3.5) ke persamaan (3.8), diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' \boldsymbol{\alpha} + (1-h) \mathbf{c}' \mathbf{x}_t &\geq y_t, \quad t = 1, 2, \dots, k, \\ \mathbf{x}' \boldsymbol{\alpha} - (1-h) \mathbf{c}' \mathbf{x}_t &\leq y_t, \quad t = 1, 2, \dots, k, \\ c &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

dimana $c_i = \mathbf{c}' \mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^n c_i |x_{ti}|$

dengan $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dan $c' = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ adalah vektor dari variabel yang belum diketahui dan S menunjukkan total dari tingkat kesamaran (*vagueness*).

4) Model Autoregressive pada data Time Series

Time series merupakan kumpulan observasi yang berurutan menurut waktu. Beberapa objek pembelajaran *time series* termasuk pemahaman dan deskripsi model, peramalan nilai di masa mendatang, dan sistem kontrol optimal. Sedangkan metodologi statistika yang ada untuk menganalisa data *time series* disebut analisis *time series* [6]. *Autoregressive* merupakan suatu proses yang berguna untuk medeskripsikan suatu kondisi dimana nilai pada masa sekarang dari suatu data *time series* Z_t tergantung dengan nilai-nilai pada waktu sebelumnya $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-k}$ dan satu *error* random. Proses *Autoregressive* orde ke- p disimbolkan oleh AR(p), dan ditulis dalam bentuk:

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \phi_2 \dot{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t \tag{4.1}$$

atau $\phi_p(B) \dot{Z}_t = a_t \tag{4.2}$

dimana $\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$ dan $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$

Keterangan:

- a_t = *error* pada waktu ke- t
- p = orde dari proses *Autoregressive*
- $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ adalah koefisien proses AR(p)

Untuk mendapatkan model AR(p) dapat dilakukan dengan metode Box-Jenkins, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Melakukan kajian deskriptif terhadap data untuk mengetahui gambaran awal data.
2. Melakukan pemeriksaan kestasioneran dan identifikasi pola musiman.
3. Dilakukan transformasi Box-Cox jika data tidak stasioner pada varians dan *differencing* jika data tidak stasioner terhadap mean.
4. Menentukan model AR(p) dengan melihat plot PACF jika data sudah stasioner terhadap mean dan varians.
5. Melakukan estimasi parameter model AR(p)
6. Melakukan Uji signifikansi parameter
7. Melakukan cek diagnosa model terbaik
8. Didapat model AR(p)

Selanjutnya model yang dihasilkan kombinasi dari regresi linear, konsep Fuzzy, dan metode AR, disebut Model *Autoregressive fuzzy time series*.

5) Kajian Model Autoregressive Fuzzy Time Series

Pada kajian ini akan dibahas tentang, penentuan parameter model dan pemilihan model *Autoregressive fuzzy time series* terbaik.

Model *Autoregressive fuzzy time series* merupakan gabungan dari model AR(p) dengan konsep regresi fuzzy pada data *time series*. Jika pada model AR(p) (4.1) $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ adalah koefisien proses dari AR(p) yang menunjukkan parameter berupa himpunan tegas (*crisp*), maka dalam model ini menggunakan konsep fuzzy

dalam menentukan parameternya dan $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ sebagai parameter fuzzy dari proses AR(p), sehingga persamaanya menjadi:

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \phi_2 \dot{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t \quad (5.1)$$

$$\text{Jika } W_t = (1-B)^d Z_t, \quad (5.2)$$

maka dapat ditulis:

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \dots + \phi_p W_{t-p} + a_t \quad (5.3)$$

dimana ϕ_p mengacu pada regresi fuzzy (3.6) dengan ϕ merupakan parameter optimum dari model AR(p) dan c nilai penyebaran dari semua parameter, diperoleh persamaan:

$$W_t = (\phi_1, c_1)W_{t-1} + (\phi_2, c_2)W_{t-2} + \dots + (\phi_p, c_p)W_{t-p} + a_t \quad (5.4)$$

Keuntungan dari menggunakan metode ini adalah dihasilkan interval (*upper bound* dan *lower bound*) pada hasil ramalan, sehingga dapat digunakan dalam pengambilan keputusan baik pada kemungkinan yang terbaik atau terburuk.

Penentuan parameter model *Autoregressive fuzzy time series* dilakukan dengan meminimumkan penyebaran (*spread*) dari nilai tengah bilangan fuzzy terhadap fungsi-fungsi batasan (*constraint*) tertentu. Sehingga terbentuk permasalahan program linier dan perlu dilakukan optimasi dengan menggunakan metode tertentu. Pada bahasan ini akan diuraikan proses pembentukan fungsi objektif dan fungsi batasan dari permasalahan program linier. Jika terdapat regresi fuzzy $y_t = \mathbf{x}_t' \beta$, maka dapat didefinisikan fungsi keanggotaan segitiga parameter β_i sebagai berikut:

$$\mu_t(y_t) = \begin{cases} 1 - \frac{|y_t - \mathbf{x}_t' \alpha|}{\mathbf{c}'|\mathbf{x}_t|} & \text{untuk } \mathbf{x}_t \neq 0 \\ 1 & \text{untuk } \mathbf{x}_t = 0, y_t = 0 \\ 0 & \text{untuk } \mathbf{x}_t = 0, y_t \neq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Fungsi keanggotaan dari bilangan fuzzy data *time series* $W_t = W_{t-i}' \beta$ berdasarkan pada persamaan (5.5) dapat didefinisikan dengan menggunakan fungsi keanggotaan segitiga parameter β_i sebagai berikut:

$$\mu_{W_t}(W_t) = \begin{cases} 1 - \frac{\left| W_t - \sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right|}{\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t} & a_t \neq 0, W_t \neq 0 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases} \quad (5.6)$$

$$t = 1, 2, 3, \dots, k \text{ dan } i = 1, 2, 3, \dots, p$$

Sedemikian hingga S didefinisikan sebagai penjumlahan dari penyebaran masing-masing parameter fuzzy dalam model pada data *time series* ($\mathbf{c}'|\mathbf{W}_{t-i}|$) adalah :

$$S = \sum_{t=1}^k \mathbf{c}'|\mathbf{W}_{t-i}| \quad (5.7)$$

karena

$$\mathbf{c}'|\mathbf{W}_{t-i}| = \sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}|,$$

dan untuk memasukan konsep Box-Jenkins, dilakukan pembobotan nilai positif dari PACF ($|\varphi_{ii}|$) pada $\mathbf{c}'|\mathbf{W}_{t-i}|$, didapatkan fungsi obyektif dari model, yaitu:

$$S = \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^k c_i |\varphi_{ii}| |W_{t-i}| \tag{5.8}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, p$. adalah ordo dari model AR(p)

$t = 1, 2, 3, \dots, k$, adalah banyak data *time series*

Selanjutnya akan ditentukan fungsi batasan dari data. Jika Faktor h merupakan ukuran yang menentukan besar kecilnya nilai c_i atau persebaran dari α_i , kisaran nilai h adalah $0 \leq h \leq 1$, penentuan nilai h tergantung dari besar kecilnya simpangan datanya dan model yang terbentuk harus dapat memuat semua data yang ada, sehingga tiap observasi W_t diasosiasikan dengan nilai keanggotaan yang lebih besar dari h , dimana $h \in [0,1]$, dapat ditulis dengan persamaan:

$$\mu_{W_t}(W_t) \geq h, \text{ untuk } t = 1, 2, \dots, k. \tag{5.9}$$

Untuk mendapatkan fungsi batasan dilakukan dengan substitusi persamaan (5.6) pada persamaan (5.9), diperoleh:

$$\mu_{W_t}(W_t) \geq h, \text{ substitusi } \mu_{W_t}(W_t) = \begin{cases} 1 - \frac{\left| W_t - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \right|}{\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t} \\ 0 \end{cases}, \text{ diperoleh:}$$

$$\left. \left. 1 - \frac{\left| W_t - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \right|}{\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t} \right\} \geq h \tag{5.10}$$

Persamaan (5.6) dapat dibentuk menjadi dua kombinasi persamaan yaitu:

$$\left. \left. 1 - \frac{\left(W_t - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \right) \right|}{\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t} \right\} \geq h, \text{ dan } \left. \left. 1 + \frac{\left(W_t - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \right) \right|}{\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t} \right\} \geq h$$

$$\text{Untuk } \left. \left. 1 - \frac{\left(W_t - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \right) \right|}{\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t} \right\} \geq h \text{ diuraikan menjadi:}$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t - \left(W_t - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \right)}{\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t} \geq h \\
 & \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) - \left(W_t - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \right) \geq h \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) \\
 & \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) - W_t + \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \geq h \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) \\
 & \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) + \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) - h \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) \geq W_t \\
 & \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) + (1-h) \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) \geq W_t \\
 & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t + (1-h) \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) \geq W_t \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

Sedangkan

$$\begin{aligned}
 & \left. 1 + \frac{\left(W_t - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \right)}{\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t} \right\} \geq h, \text{ juga diuraikan menjadi:} \\
 & \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t + \left(W_t - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \right)}{\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t} \geq h \\
 & \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) + \left(W_t - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \right) \geq h \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) \\
 & \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) + W_t - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) \geq h \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) \\
 & \Leftrightarrow - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) + \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) - h \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) \geq -W_t \\
 & \Leftrightarrow - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t \right) + (1-h) \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) \geq -W_t \\
 & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t - (1-h) \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| + a_t \right) \leq W_t \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (5.8), (5.11), dan (5.12) digunakan untuk menentukan parameter dari model *Autoregressive fuzzy time series*, persamaan tersebut dalam permasalahan *linear programming* ditulis sebagai berikut:

$$\text{Minimize } S = \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^k c_i |\varphi_{ii}| |W_{t-i}|$$

untuk :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t + (1-h) \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| \right) &\geq W_t, \\ \sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t - (1-h) \left(\sum_{i=1}^p c_i |W_{t-i}| \right) &\leq W_t, \\ c_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p. \quad t = 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \tag{5.13}$$

dengan:

S = total tingkat kesamaran (*vagueness*).

$$W_t = (1-B)^d Z_t$$

φ_{ii} = koefisien PACF lag ke-i

α_i, c_i = parameter fuzzy

a_t = error pada waktu ke-t

fungsi batasan (*constraints*) yang terbentuk tergantung dari banyaknya data yang diambil, jika terdapat n data *time series* maka akan terbentuk 2n fungsi batasan dengan kombinasi nilai koefisien yang berbeda berdasarkan pada persamaan (5.13), selanjutnya permasalahan linier di atas dapat dioptimasi dengan menggunakan metode yang sesuai.

Setelah didapatkan nilai c_i dari proses optimasi program linier, kemudian nilai tersebut disubstitusikan pada persamaan (5.3), didapatkan model:

$$W_t = (\phi_1, c_1)W_{t-1} + (\phi_2, c_2)W_{t-2} + \dots + (\phi_p, c_p)W_{t-p} + a_t \tag{5.14}$$

untuk memperoleh model yang berupa interval (*lower bound* dan *upper bound*) dilakukan dengan mengubah nilai positif dan negatif dari c_i , didapat:

Model *Autoregressive Fuzzy Time Series* untuk batas bawah interval (*lower bound*)

$$W_t = (\phi_1 - c_1)W_{t-1} + (\phi_2 - c_2)W_{t-2} + \dots + (\phi_p - c_p)W_{t-p} + a_t \tag{5.15}$$

Model *Autoregressive Fuzzy Time Series* untuk batas atas interval (*upper bound*)

$$W_t = (\phi_1 + c_1)W_{t-1} + (\phi_2 + c_2)W_{t-2} + \dots + (\phi_p + c_p)W_{t-p} + a_t \tag{5.16}$$

Kriteria terbaik dalam model *Autoregressive fuzzy time series* adalah model yang memiliki nilai proporsi *error* terkecil, dalam hal ini data yang terletak di luar area batas bawah dan batas atas model dikategorikan sebagai *error* model. Nilai proporsi *error* ditentukan dengan membagi antara banyaknya data yang terdapat di luar area batas bawah dan batas atas model dengan banyak data secara keseluruhan [8]. Pemilihan model terbaik dilakukan terhadap model yang terbentuk pada masing-masing fungsi keanggotaannya (h) yang terletak antara 0 dan 1. Selain itu juga dapat ditentukan dengan melihat sempit atau lebarnya interval yang terbentuk, jika interval yang dihasilkan terlalu lebar tentu akan menyulitkan dalam mengambil keputusan dan ketidakpercayaan dalam peramalan [5]

3. Kesimpulan

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

- 1) Model *Autoregressive fuzzy time series* merupakan gabungan dari model AR(p) dengan konsep regresi fuzzy pada data *time series*, dengan hasil ramalan berupa interval.
- 2) Parameter model *Autoregressive Fuzzy Time Series* diperoleh dengan melakukan optimasi pada permasalahan program linier:

$$\text{Minimize } S = \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^k c_i |\varphi_{ii}| |W_{t-i}|$$

untuk :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t + (1-h) \left(\sum_{t=1}^p c_i |W_{t-1}| \right) \geq W_t,$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i W_{t-i} + a_t - (1-h) \left(\sum_{t=1}^p c_i |W_{t-1}| \right) \leq W_t,$$

$$c_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p. \quad t = 1, 2, \dots, k,$$

- 3) Terdapat dua dasar dalam pemilihan model, yaitu nilai proporsi *error* model dan lebarnya interval yang diperoleh, jika nilai proporsi *error* semakin kecil maka akan terbetuk interval yang lebih lebar, atau sebaliknya jika proporsi *error* semakin besar maka akan didapatkan interval model yang semakin sempit.

Daftar Pustaka

- Draper, N.R. dan Smith, H. (1992), *Analisis Regresi Terapan, Edisi Kedua*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.
- Box, G.E.P. Jenkins, G.M, (1976), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-day Inc., San Francisco, CA.
- Song, Q., B.S. Chissom, (1993), Fuzzy time series and its models, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 54, Hal. 269 - 277.
- Tanaka, H.,(1987), Fuzzy data analysis by possibility linear models, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 24, Hal. 363 – 375.
- Tseng, F.M., Tzeng, G.H., Yu, H.C., Yuan, B.J.C., (2001), Fuzzy ARIMA Model for Forecasting the Foreign Exchange Market, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 118, Hal. 9 - 19.
- Wei, W.W.S., (1990), *Time Series Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, California.
- Zadeh, L. A., (1965), “Fuzzy Sets”. *Information Control*, Vol. 8, Hal. 338-353.
- Ozawa, K., Nikimora T., Nakashima T., (2000), Fuzzy Time Series Model of Electric power Consumption, *Journal of Advance Computational Intelegence*. Vol. 4 No. 3.