

# **METODE BULIRSCH-STOER PADA MODEL PREDATOR- PREY PENANGKAPAN IKAN DENGAN PERILAKU SCHOOLING**

**(BULIRSCH–STOER METHOD FOR PREDATOR-PREY MODEL OF  
FISH CATCHING WITH SCHOOLING BEHAVIOR)**

**Rizal Dian Azmi<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Universitas Muhammadiyah Malang, rizaldian@umm.ac.id

## **Abstrak**

Dalam bidang matematika, banyak model yang dikembangkan untuk memprediksi perubahan dalam bidang perikanan. Salah satu model yang sering digunakan untuk menganalisis interaksi ikan beserta biota laut lainnya adalah model *predator-prey*. Penelitian sebelumnya telah menganalisis dan membuat simulasi model *predator-prey* dengan Metode *Runge-Kutta*. Artikel ini membandingkan Metode *Runge-Kutta* dan metode *Bulirsch–Stoer*. Hasil yang diperoleh memberikan kesimpulan bahwa metode *Bulirsch–Stoer* yang digunakan masih perlu dikembangkan karena hasil yang diberikan metode ini tidak konvergen.

**Kata kunci:** Metode *Bulirsch–Stoer*, Model *Predator-Prey*, Metode *Runge-Kutta*

## **Abstract**

*In the field of mathematics, many models have been developed to predict changes in the field of fisheries. One model that is often used to analyze the interaction of fish and other marine biota is the predator-prey model. Previous studies have analyzed predatory prey model simulations with the Runge-Kutta method. This article compares Runge-Kutta method and Bulirsch-Stoer method. Refers to the results, it can be concluded that the Bulirsch-Stoer method used still needs to be developed because this method result is not converging.*

**Keywords:** *Bulirsch-Stoer Method, Predator-Prey Model, Runge-Kutta Method*

## **PENDAHULUAN**

Memiliki 17.500 pulau, luas laut 5,8 juta km<sup>2</sup> atau 70% dari luas negara, dan garis pantai sepanjang 95.181 km terpanjang kedua setelah Rusia (Munaf & Windari, 2015) menjadikan Indonesia sebagai salah satu negara maritim terbesar di dunia. Kondisi geografis ini membuat Indonesia memiliki sumber daya alam yang melimpah, seperti ikan dan biota laut lainnya. Potensi ini menjadikan sektor perikanan dan kelautan merupakan pilihan yang terbaik untuk meningkatkan perekonomian masyarakat Indonesia.

Dalam bidang matematika, banyak model yang dikembangkan untuk memprediksi perubahan dalam bidang perikanan. Salah satu model yang sering digunakan untuk menganalisis interaksi ikan beserta biota laut lainnya adalah model *predator-prey*. Banyak peneliti yang menggunakan model ini untuk melihat

bagaimana interaksi ikan sebagai predator dan makanannya (Skalski & Gilliam, 2001)(Mishra, Raw, & Tiwari, 2019). Selain itu model *predator-prey* ini juga dapat digunakan untuk melihat dampak populasi ikan dengan adanya pemanenan (Agarwal & Pathak, 2017; Ang & Safuan, 2019; Manna, Maiti, & Samanta, 2018).

Manna (Manna et al., 2018) mengembangkan model *predator-prey* dengan *predator* dan *prey* yang dimodelkan adalah dua spesies ikan yang berbeda, contohnya seperti ikan tuna (*Thunnus spp.*) sebagai *predator* dan ikan sardine (*Sardinops sagax*) sebagai *prey*. Kedua spesies ini merupakan spesies ikan yang memiliki keteraturan dalam kelompok spesiesnya berdasarkan pergerakannya seperti bergerak ke kanan, ke kiri, dan memutar secara serempak. Keteraturan ini dinamakan sebagai “*Schooling*”. Model yang telah dikembangkan dengan melibatkan ikan berperilaku *schooling* ini dianalisis untuk mengetahui bagaimana pemanenan yang baik untuk mempertahankan populasi masing-masing spesies ikan. Dari penelitian ini diperoleh bahwa model ini memiliki solusi yang bernilai positif dan terbatas untuk setiap populasi. Pendekatan yang digunakan pada penelitian ini adalah pendekatan analitik. Selain pendekatan analitik, model ini dapat dianalisis menggunakan pendekatan numerik. Karena model berbentuk permasalahan nilai awal, maka dapat diselesaikan dengan beberapa metode contohnya seperti menggunakan Metode *Euler*, Metode *Runge-Kutta* (C. Woodford & Phillips, 2012), atau Metode *Bulirsch–Stoer* (Kiusalaas, 2010).

Artikel ini membandingkan hasil solusi dari 2 metode yaitu Metode *Runge-Kutta* dan Metode *Bulirsch–Stoer*. Metode *Runge-Kutta* yang digunakan adalah Metode *Runge-Kutta* orde 4.

## METODE

### Model Predator-Prey

Perkembangan populasi *prey* tanpa adanya interaksi antar spesies tersebut mengikuti fungsi pertumbuhan logistik. Fungsi logistik ini diperkenalkan pertama kali oleh Verhulst, pakar matematika berkebangsaan Belgia, pada tahun 1838 (Baca’er, 2011). Persamaan pertumbuhan logistik ini dinyatakan dengan

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

dengan  $x(t)$  adalah populasi *prey*,  $r$  laju pertumbuhan, dan  $K$  adalah daya tampung atau jumlah maksimum populasi. Jika terdapat interaksi antara dua populasi ikan dengan perilaku *schooling* ini, maka model *predator-prey* diberikan oleh (Manna et al., 2018)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - b\sqrt{x}\sqrt{y} - q_1Ex, \quad x(0) > 0, \\ \frac{dy}{dt} &= c\sqrt{x}\sqrt{y} - dy - q_2Ey, \quad y(0) > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Parameter  $b$  adalah laju konsumsi *prey* oleh predator,  $c$  adalah laju munculnya predator, dan  $E$  merupakan upaya pemanenan yang dilakukan. Parameter  $q_1$  dan  $q_2$  merupakan koefisien penangkapan masing-masing spesies. Parameter-parameter tersebut diasumsikan bernilai positif. Metode numerik yang digunakan oleh Manna (2018) untuk simulasi numerik model tersebut adalah Metode *Runge-Kutta*. Sehingga artikel ini membandingkan antara Metode *Bulirsch–Stoer* dan Metode *Runge-Kutta*. Berikut adalah penjelasan mengenai Metode *Runge-Kutta* dan Metode *Bulirsch–Stoer* untuk Model (1).

### Metode Runge-Kutta

Metode *Runge-Kutta* orde 4 (RK4) dikembangkan dari Metode *Taylor* orde 4 (John H. Mathews, 1999). Dengan menggunakan Metode *Runge-Kutta* orde 4, Persamaan (1) didekati oleh

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4),$$

dengan

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_k, x_k, y_k) = r(x_k) \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) - b\sqrt{x_k}\sqrt{y_k} - q_1 E x_k, & g_1 &= g(t_k, x_k, y_k) = c\sqrt{x_k}\sqrt{y_k} - d y_k - q_2 E y_k, \\ f_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_1, y_k + \frac{h}{2}g_1\right), & g_2 &= g\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_1, y_k + \frac{h}{2}g_1\right), \\ f_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_2, y_k + \frac{h}{2}g_2\right), & g_3 &= g\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_2, y_k + \frac{h}{2}g_2\right), \\ f_4 &= f(t_k + h, x_k + hf_3, y_k + hg_3), & g_4 &= g(t_k + h, x_k + hf_3, y_k + hg_3), \end{aligned}$$

Dengan panjang langkah yang digunakan ( $h$ ), Metode *Runge-Kutta* ini memiliki tingkat akurasi orde 4 atau dituliskan sebagai  $O(h^4)$  (C. Woodford & Phillips, 2012).

### Metode Bulirsch-Stoer

Metode *Bulirsch-Stoer* ini dikembangkan berdasarkan Metode Titik Tengah (*Midpoint Method*). Metode Titik Tengah untuk menyelesaikan Model (1) adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \left( r(x_0) \left(1 - \frac{x_0}{K}\right) - b\sqrt{x_0}\sqrt{y_0} - q_1 E x_0 \right), \\ y_1 &= y_0 + h (c\sqrt{x_0}\sqrt{y_0} - d y_0 - q_2 E y_0), \\ x_{k+1} &= x_{k-1} + 2h \left( r(x_k) \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) - b\sqrt{x_k}\sqrt{y_k} - q_1 E x_k \right), \\ y_{k+1} &= y_{k-1} + 2h (c\sqrt{x_k}\sqrt{y_k} - d y_k - q_2 E y_k), \end{aligned}$$

dengan  $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ . Kemudian hasil akhir dari  $x_n$  dan  $y_n$  adalah rata-rata hasil Metode Titik Tengah tersebut dengan

$$x_n = x_{n-1} + h \left( r(x_n) \left(1 - \frac{x_n}{K}\right) - b\sqrt{x_n}\sqrt{y_n} - q_1 E x_n \right),$$

dan

$$y_n = y_{n-1} + h (c\sqrt{x_n}\sqrt{y_n} - d y_n - q_2 E y_n),$$

yang merupakan formula dari Metode *Euler*. Sehingga perhitungan nilai  $x_n$  dan  $y_n$  dapat dituliskan menjadi

$$x_n = \frac{1}{2} \left( x_n + \left( x_{n-1} + h \left( r(x_n) \left(1 - \frac{x_n}{K}\right) - b\sqrt{x_n}\sqrt{y_n} - q_1 E x_n \right) \right) \right),$$

dan

$$y_n = \frac{1}{2} \left( y_n + \left( y_{n-1} + h (c\sqrt{x_n}\sqrt{y_n} - d y_n - q_2 E y_n) \right) \right),$$

Metode Titik Tengah ini memiliki *error* yang besar (Kiusalaas, 2010) yaitu orde 2, sehingga untuk meminimalisir *error* yang terjadi, maka digunakan Metode Ekstrapolasi Richardson. Penggunaan Metode Ekstrapolasi Richardson untuk memperbaiki hasil perhitungan dengan menghitung  $x_n$  dan  $y_n$  dengan pengambilan langkah  $h$  dan selanjutnya dengan langkah  $\frac{h}{2}$ . Sehingga diperoleh 2 nilai  $x_n$  yang dinotasikan  $x_n(h)$  dan  $x_n\left(\frac{h}{2}\right)$ , begitu juga untuk nilai  $y_n$  terdapat  $y_n(h)$  dan  $y_n\left(\frac{h}{2}\right)$ . Kemudian dengan Metode Ekstrapolasi Richardson diperoleh

$$x_n = \frac{4x_n(h) - x_n\left(\frac{h}{2}\right)}{3},$$

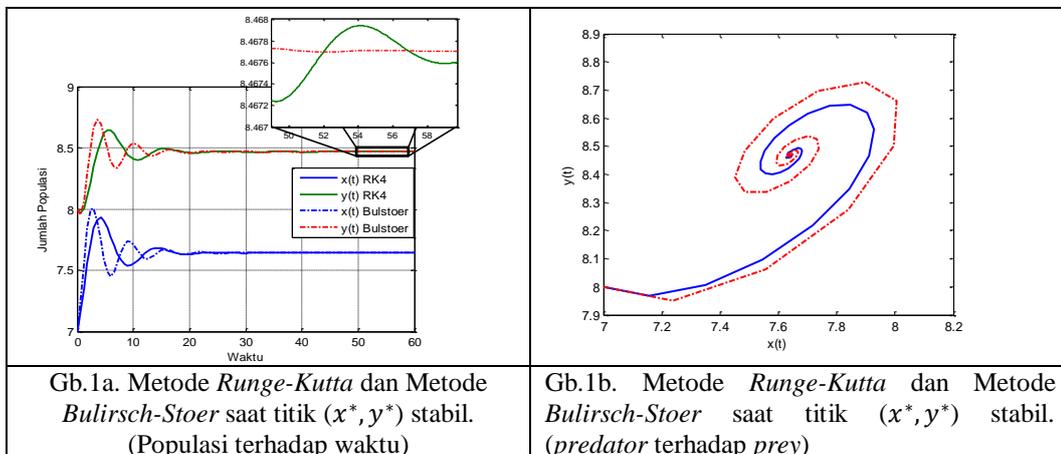
dan

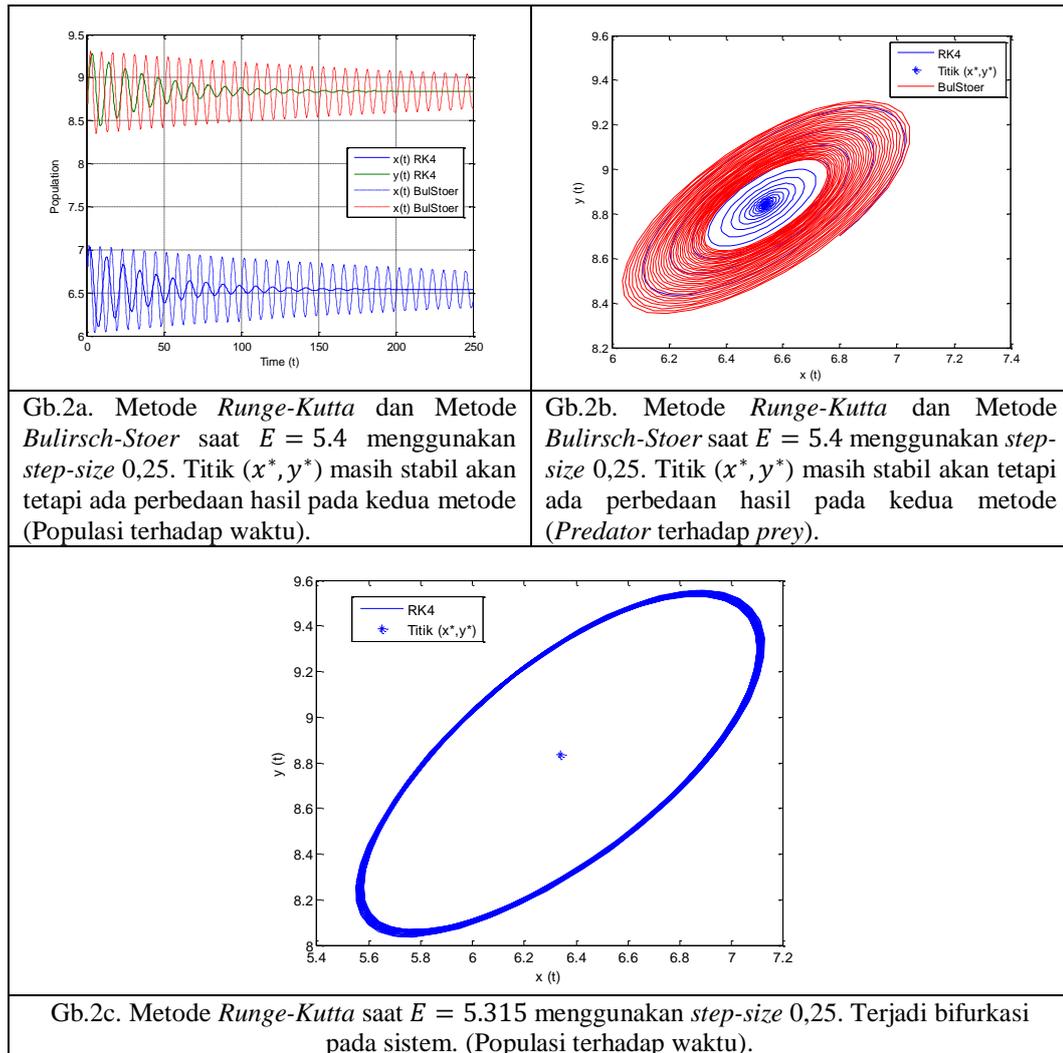
$$y_n = \frac{4y_n(h) - y_n\left(\frac{h}{2}\right)}{3}.$$

Dengan menggunakan metode ini maka Metode Titik Tengah yang memiliki tingkat akurasi orde 2 dapat meningkat menjadi orde 4.

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Model *predator-prey* (1) memiliki 3 titik kesetimbangan (Manna et al., 2018). Titik kesetimbangannya adalah  $(0,0)$ ,  $(\hat{x}, 0)$ , dan  $(x^*, y^*)$  dengan  $\hat{x} = k\left(1 - \frac{q_1 E}{r}\right)$ ,  $x^* = \left(k\left(1 - \frac{q_1 E}{r}\right) - \frac{kbc}{r(d+q_2 E)}\right)$ ,  $y^* = \left(\frac{c\sqrt{x^*}}{d+q_2 E}\right)^2$ . Titik  $(0,0)$  stabil global jika  $\bar{E} < E < \frac{r}{q_1}$  dan titik  $(\hat{x}, 0)$  selalu tidak stabil. Sedangkan untuk titik  $(x^*, y^*)$  akan terjadi bifurkasi pada saat  $E = E^*$ . Selanjutnya simulasi model dilakukan dengan menggunakan Metode *Bulirsch-Stoer* dan Metode *Runge-Kutta*. Simulasi yang dilakukan berfokus kepada titik  $(x^*, y^*)$  dikarenakan titik tersebut memiliki keadaan khusus, yaitu akan terjadinya bifurkasi jika nilai  $E$  berubah. Sehingga akan dilakukan simulasi model pada dua keadaan yaitu pada saat sistem stabil ke titik  $(x^*, y^*)$  dan pada saat terjadinya bifurkasi dengan Metode *Bulirsch-Stoer* dan Metode *Runge-Kutta* yang kemudian dibandingkan hasilnya.





Dari gambar Gb.1a. dan Gb.1b. terdapat perbedaan hasil dari kedua metode dengan parameter yang digunakan adalah  $r = 6, K = 44, c = 2, d = 0.1, q_1 = 0.3, q_2 = 0.3, b = 3, E = 6$ , dan nilai awal  $x(0) = 6.8, y(0) = 8.7$ . Pada Gb.1a, terlihat saat  $t = 50$  Metode *Runge-Kutta* masih ada osilasi, akan tetapi pada hasil Metode *Bulirsch-Stoer* terjadi perubahan nilai yang sangat kecil. Namun dengan menggunakan *step-size* yang sama kedua metode memberikan hasil akhir yang sama bahwa populasi *prey* akan menuju ke 7.6421 dan *predator* akan menuju ke 8.4677.

Sedangkan jika parameter laju penangkapan yang digunakan adalah  $E = 5,4$  maka terlihat pada Gb.2a. titik  $(x^*, y^*)$  masih stabil. Akan tetapi untuk menuju titik kestabilannya memerlukan waktu  $t = 250$  dengan Metode *Runge-Kutta* yang diperlihatkan pada Gb.2a. Hasil yang diperoleh Metode *Runge-Kutta* terlihat lebih cepat konvergen dibandingkan dengan Metode *Bulirsch-Stoer* yaitu pada saat  $t = 250$  Metode *Bulirsch-Stoer* masih belum mencapai ke titik kestabilan.

Metode *Runge-Kutta* dapat memperlihatkan pergerakan sistem pada saat terjadinya bifurkasi dengan  $E = 5.315$ . Sistem akan kehilangan kestabilan dan terjadi *limit cycle*. Sedangkan pada saat  $E = 5.315$  Metode *Bulirsch-Stoer* tidak dapat menyelesaikan dikarenakan pada bagian Metode Titik Tengah tidak

konvergen. Dengan kata lain Metode *Runge-Kutta* masih lebih baik daripada Metode *Bulirsch-Stoer* dikarenakan Metode *Bulirsch-Stoer* tidak konvergen pada saat terjadinya bifurkasi dengan  $E = 5.315$ .

## KESIMPULAN DAN SARAN

Hasil yang diberikan oleh metode *Bulirsch-Stoer* masih terdapat kekurangan. Pada perhitungan dengan nilai parameter pada saat model *predator-prey* mengalami bifurkasi, metode ini tidak konvergen pada bagian perhitungan midpoint method. Sehingga dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa metode *Bulirsch-Stoer* ini tidak lebih baik daripada metode *Runge-Kutta* untuk menghitung simulasi model *predator-prey* ini. Hasil yang diberikan oleh metode *Bulirsch-Stoer* ini mengharuskan adanya pengembangan agar metode ini memiliki hasil yang lebih baik untuk menyelesaikan berbagai permasalahan.

## DAFTAR RUJUKAN

- Agarwal, M., & Pathak, R. (2017). Harvesting and Hopf Bifurcation in a Prey-Predator Model with Holling Type IV Functional Response. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 2(1), 99. <https://doi.org/10.26708/ijmsc.2012.1.2.12>
- Ang, T. K., & Safuan, H. M. (2019). Chaos, Solitons and Fractals Harvesting in a toxicated intraguild predator – prey fishery model with variable carrying capacity. *Chaos, Solitons and Fractals: The Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena*, 126, 158–168. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.06.004>
- Bacaer, N. (2011). A Short History of Mathematical Population Dynamics (pp. 35–39). Springer-Verlag London Limited. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-115-8>
- C. Woodford, & Phillips, C. (2012). *Numerical Methods with Worked Examples: Matlab Edition Second Edition* (2nd ed.). Springer Science+Business Media.
- John H. Mathews, K. D. F. (1999). *Numerical Methods Using Matlab Third Edition*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Kiusalaas, J. (2010). *NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING WITH MATLAB Second Edition*. New York: Cambridge University Press.
- Manna, D., Maiti, A., & Samanta, G. P. (2018). Analysis of a predator-prey model for exploited fish populations with schooling behavior. *Applied Mathematics and Computation*, 317, 35–48. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.052>
- Mishra, P., Raw, S. N., & Tiwari, B. (2019). Study of a Leslie–Gower predator-prey model with prey defense and mutual interference of predators. *Chaos, Solitons and Fractals*, 120, 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.01.012>
- Munaf, D. R., & Windari, R. (2015). PENGEMBANGAN SUMBER DAYA KELAUTAN DALAM INDUSTRI MARITIM DUNIA. *Jurnal Sositknologi*, 14(2), 154.
- Skalski, G. T., & Gilliam, J. F. (2001). Functional responses with predator interference: Viable alternatives to the Holling type II model. *Ecology*, 82(11), 3083–3092. [https://doi.org/10.1890/0012-9658\(2001\)082\[3083:FRWPIV\]2.0.CO;2](https://doi.org/10.1890/0012-9658(2001)082[3083:FRWPIV]2.0.CO;2)